

METODA ELEMENTELOR FINITE

Ludmila DUCA

Departamentul Ingineria Software și Automatică, Facultatea Calculatoare Informatică și Microelectronică,
Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova

Autorul corespondent: Ludmila Duca, ludmila.duca@ati.utm.md

Rezumat. Metoda elementelor finite este folosită la calculul problemelor din domeniul ingineresc și modele matematice pentru a primi rezultate cât mai precise. Pentru aceasta corpurile sunt divizate prin metoda elementelor finite și în urma aplicării diferitor metode de calcul, în dependență de tipul metodei elementelor finite, vom primi rezultate mult mai precise.

Cuvinte cheie: metoda elementelor finite, elemente finite, metode, noduri.

Introducere

Metoda elementelor finite este principala metodă a mecanicii structurale moderne, care stă la baza majorității sistemelor software moderne concepute pentru a efectua calcule ale structurilor construcțiilor pe un computer [1].

Metoda elementelor finite a fost aplicată pentru prima dată în practica ingineriei la începutul anilor 1950. Inițial, s-a dezvoltat în două direcții independente una de cealaltă - inginerie și matematică. Într-un stadiu incipient al formulării, metoda elementelor finite sa bazat pe principiile mecanicii structurale, care i-au limitat domeniul de aplicare. Și numai atunci când bazele metodei au fost formulate în formă variațională, a devenit posibilă extinderea ei la multe alte probleme. Dezvoltarea rapidă a metodei elementelor finite a mers în paralel cu progresul tehnologiei moderne de calcul și aplicarea acesteia în diverse domenii ale științei și practicii ingineriei [2].

Definiții de bază ale metodei elementelor finite

Metoda elementelor finite, la fel ca multe alte metode numerice, se bazează pe reprezentarea unei structuri continue reale prin modelul său discret și înlocuirea ecuațiilor diferențiale care descriu starea de încordare-deformare a corpurilor solide cu un sistem de ecuații algebrice. În același timp, metoda elementelor finite permite o interpretare clară geometrică, constructivă și fizică.

Esența metodei constă în faptul că aria (unui, bidimensională sau tridimensională) ocupată de structură este împărțită într-un număr de sub-zone mici, dar finite ca mărime (Fig. 1). Acestea din urmă sunt numite elemente finite, iar procesul de defalcare în sine se numește discretizare [3].

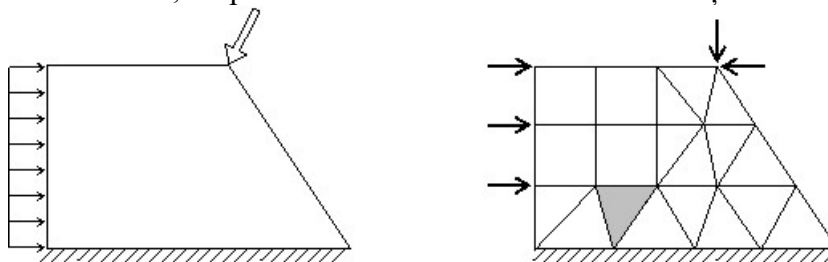


Figura 1 Discretizarea elementelor finite

În funcție de tipul structurii și de natura deformării acesteia, elementele finite pot avea forme diferite. Deci, la calcularea sistemelor de tije, elementele finite sunt secțiuni de tije; pentru structurile continue bidimensionale, cel mai des se folosesc elementele finite triunghiulare și dreptunghiulare; iar pentru zone tridimensionale - elementele finite sub formă de tetraedru sau paralelipiped. Spre deosebire de o structură reală, într-un model discret, elementele finite sunt interconectate doar în puncte (noduri) separate printr-un anumit număr finit de parametri nodali.

Metoda elementului finit este o metodă variațională. Energia funcțională pentru întreaga zonă luată în considerare este reprezentată aici ca suma funcționalelor părților sale individuale - elemente finite. Pentru aria fiecărui element, independent de celelalte, se stabilește propria sa lege de distribuție a funcțiilor dorite. O astfel de aproximare continuă pe bucăți este realizată folosind funcții de aproximare special selectate, numite și coordonate sau interpolare. Cu ajutorul lor, mărimile continue dorite (deplasări, tensiuni etc.) în cadrul fiecărui element finit sunt exprimate în termeni de valori ale acestor mărimi la punctele nodale, iar o sarcină dată arbitrară este înlocuită cu un sistem de forțe nodale echivalente.

Cu o astfel de aproximare pe bucăți-continuă, condiția de compatibilitate este prevăzută numai la noduri, iar în alte puncte de-a lungul limitelor elementului finit, această condiție este îndeplinită aproximativ în cazul general (în acest sens, elemente finite de diferite grade de compatibilitate sunt distinse) [4].

Cea mai răspândită este metoda elementelor finite în deplasări, care are multe în comun cu metoda Ritz și metoda diferențelor variaționale. Diferența dintre schema tradițională a metodei Ritz și metoda elementului finit sub forma metodei deplasării constă în alegerea unui sistem de funcții de aproximare. Dacă în metoda Ritz deplasările sunt approximate pe întreaga zonă a definiției lor, atunci în metoda elementului finit - pentru fiecare element finit separat, ceea ce permite utilizarea funcțiilor de aproximare de o formă mai simplă. În primul caz, energia potențială totală funcțională variază cu coeficienți nedeterminați, în al doilea - prin deplasări la nodurile grilei, ceea ce duce la un sistem de ecuații algebrice ale metodei deplasării. În același timp, utilizarea aproximării continue pe bucăți face posibilă obținerea unei structuri rar umplute sau în bandă a matricei de coeficienți a sistemului de ecuații și face astfel posibilă utilizarea unor metode mai eficiente de rezolvare a acestora.

Numărul de noduri și numărul de deplasări în nod (gradul de libertate al nodului) adoptate pentru elementul finit pot fi diferite, dar nu trebuie să fie mai mici decât minimul necesar pentru a descrie starea de încordare-deformare a elementului finit în cadrul modelului fizic acceptat. Numărul de deplasări independente în toate nodurile elementului determină gradul de libertate al elementului finit. Gradul de libertate al întregii structuri și ordinea sistemului de ecuații de rezolvare este determinată de numărul total de deplasări ale tuturor nodurilor sale. Deoarece principalele necunoscute, sub forma metodei deplasării, sunt considerate a fi deplasări nodale, gradul de libertate al elementului finit și al întregii structuri în ansamblu este un concept extrem de important în metoda elementului finit. Conceptele de grad de libertate al unui nod, elemental finit și structură și gradul de indeterminare cinematică a acestora sunt identice.

Metoda de împărțire a zonei considerate în elemente finite, numărul acestora și numărul de grade de libertate, precum și tipul de funcții de aproximare determină în cele din urmă acuratețea calculului de proiectare. Trebuie de remarcat faptul că o simplă creștere a numărului de elemente finite nu îmbunătățește întotdeauna acuratețea calculelor. Problemele de stabilitate și convergență a soluției, precum și aprecierea acurateții rezultatelor obținute sunt principalele atunci când se utilizează metoda elementului finit.

În comparație cu alte metode numerice, metoda elementului finit este mai bine algoritmat și mai flexibil în descrierea geometriei și a condițiilor de limită ale zonei calculate. Avantajele metodei includ claritatea fizică și versatilitatea [5].

Metoda elementului finit sub forma metodei deplasării poate fi considerată ca o formă matriceală a metodei clasice de deplasare, care diferă doar printr-o formalizare mai profundă a algoritmului și orientarea acestuia către utilizarea calculatoarelor.

Metoda elementelor finite face posibilă automatizarea aproape completă a calculului sistemelor de bare, deși, de regulă, necesită un număr mult mai mare de operații de calcul în comparație cu metodele clasice de mecanică structurală. Cu toate acestea, în condițiile moderne, o cantitate mare de calcule nu reprezintă o problemă serioasă și, în acest sens, odată cu introducerea calculatoarelor în practica inginerescă, metoda elementului finit a devenit larg răspândit. Prin urmare, cunoașterea bazelor metodei elementelor finite și a instrumentelor software moderne care permit rezolvarea diferitelor probleme pe baza acestora este absolut necesară pentru un inginer.

Tipuri ale metodei elementelor finite.

Conform metodei de obținere a ecuațiilor de bază, adică de rezolvare, există patru tipuri principale ale metodei elementelor finite: directe, variaționale, reziduuri ponderate și bilanț energetic [6].

Metoda directă este similară cu metoda deplasării matricei pentru sistemele de tije, se bazează pe prevederile care au fost utilizate într-un stadiu incipient de dezvoltare, metoda elementului finit. Această metodă este convenabilă datorită simplității sale și semnificației geometrice și fizice evidente a pașilor individuali de aproximare. Relațiile pentru elementele finite sunt construite direct pe baza a trei grupuri de ecuații: statice, geometrice și fizice. Cu toate acestea, domeniul de aplicare al metodei directe este foarte limitat: poate fi folosit doar pentru elemente finite de geometrie simplă cu un număr mic de grade de libertate per nod.

Metoda variațională se bazează pe principiile staționarității unei variabile în funcție de una sau mai multe funcții. Aplicată la mecanica unui corp solid deformabil, această variabilă reprezintă energia potențială (funcțională Lagrange) sau suplimentară (funcțională Castilliano) a sistemului sau se formează pe baza acestor două energii (funcționale Hellinger-Reissner, Hu-Washitsu). Dacă înlocuim expresii de aproximare pentru funcțiile dorite în funcțional și aplicăm principii extreme (respectiv, principiul Lagrange, principiul Castiliano etc.), obținem un sistem de ecuații algebrice, a cărui soluție vor fi valorile necunoscutele nodale. Spre deosebire de metoda directă, metoda variațională poate fi aplicată cu succes atât la probleme simple, cât și la cele complexe.

Metoda reziduală este cea mai generală abordare a construcției relațiilor de bază. Această metodă este indicată să se aplice atunci când se rezolvă probleme pentru care este dificil sau imposibil să se formuleze o ecuație variațională, adică. funcțional. Esența metodei reziduurilor ponderate este introducerea unor reziduuri - abaterea soluției aproximative de la soluția exactă a ecuațiilor diferențiale pentru o problemă dată. Pentru a obține „cea mai bună” soluție, este necesar să se minimizeze o integrală a reziduurilor în domeniul computațional. Pentru a îmbunătăți eficiența, împreună cu reziduul în sine, așa-numita funcție de greutate este de obicei introdusă în integrand; în acest caz, metoda se numește metoda reziduurilor ponderate. Alegerea schemei de minimizare și a funcțiilor de greutate determină diferite variante ale metodei reziduale. Cele mai frecvent utilizate dintre acestea sunt metoda Galerkin, care duce la aceleași ecuații ca abordarea variațională și metoda celor mai mici pătrate.

Metoda bilanțului energetic (metoda Auden) se bazează pe echilibrul diferitelor tipuri de energie, scrise în formă integrală. Această metodă este utilizată cu succes în rezolvarea problemelor neliniare și dinamice.

Concluzii

Metoda elementelor finite este implementată pe larg în domeniul ingineresc și modelare matematică. Aceasta ne dă posibilitatea de a reduce timpul chiar la etapa de proiectare efectuând calcule mai precise. Modelarea obiectului la etapa de proiectare și efectuând mai multe experimente reduce cheltuielile financiare nedorite care pot apărea în cazul care nu se aplica modelul matematic optim.

Referințe

1. RADEȘ, M. *Analiza cu elemente finite*. București, **Universitatea Politehnica din București**, 2019.
2. Bathe, K.-J. and Wilson, E. L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
3. Blumenfeld, M., *Introducere în metoda elementelor finite*, Editura tehnică, București, 1995.
4. Desai, C. S. and Abel, J. F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.
5. Comșa D.-S., *Metoda elementelor finite*, Editura U. T. PRES, Cluj-Napoca, 2007.
6. Maksay, Ș. I., Bistriean D. A., *Introducere în metoda elementelor finite*, Editura Cerami, Iași, 2008.