CZU: 517.912

METODE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR TRANSCENDENTE

Andrei CORLAT
Ion JARDAN
Universitatea Tehnică a Moldovei
Institutul de Matematică și Informatică „Vladimir Andrunachievici"
e-mail: andrei.corlat@isa.utm.md, ion.jardan@mate.utm.md

Rezumat. În materialul de față sunt prezentate diferite metode de rezolvare a ecuațiilor transcendente: metoda standard sau elementară și metoda substituției.
Cuvinte cheie: ecuație transcendentă, metodă de rezolvare, metoda elementară, metoda substituției.

Abstract. Different methods of solving transcendental equations are presented in the present material: the standard or elementary method and the substitution method.
Keywords: transcendental equation, solution method, elementary method, substitution method.

Amintim, ecuațiile transcendente se numesc ecuațiile de forma $f(x) = 0$, unde $f(x)$ este o funcție transcendentă elementară (de exemplu exponențială, logaritmică, trigonometrică). De regulă, în caz general, ecuațiile transcendente nu pot fi rezolvate cu ajutorul unor metode elementare (standarde). Vom prezenta metode speciale pentru rezolvarea unor tipuri de ecuații transcendente [1-3].

Exemplul 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 + 1 = cos\, x$; b) $ln(cos\, x) = x^4$; c) $2^{|x|(x-\pi)^2} = |cos\, x|$;

d) $2\, cos\left(\frac{x}{3}\right) = 2^x + 2^{-x}$; e) $arccos(2\, log_3(tg\, x)) = 0$; f) $log_{\sqrt{2}\, sin\, x}(1 + cos\, x) = 2$.

Soluții.

a) Se observă că domeniul de valori al funcției f ce reprezintă membrul din stânga ecuației este $E(f) = 1; +\infty)$, iar domeniul de valori al funcției g ce reprezintă membrul din dreapta ecuației este $E(g) = [-1; 1]$. Astfel ecuația data este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ cos\, x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$S = \{0\}.$$

b) DVA al ecuației este mulțimea $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$. În DVA $0 < cos\, x \leq 1$, prin urmare $ln(cos\, x) \in -\infty; 0$, în același timp $x^4 \geq 0$.

Astfel ecuația data este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x^4 = 0 \\ ln(cos\, x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ cos\, x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$S = \{0\}.$$

c) Se observă că $|x|(x-\pi)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, și prin urmare $2^{|x|(x-\pi)^2} \geq 1$. În același timp, membrul din dreapta ecuației, $|cos\,x|$ primește valori de la 0 la 1, $0 \leq |cos\,x| \leq 1$ și, prin urmare, se obține sistemul

$$\begin{cases} 2^{|x|(x-\pi)^2} = 1 \\ |cos\,x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|(x-\pi)^2 = 0 \\ cos\,x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \end{array}\right. \\ x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \end{array}\right..$$

$$S = \{0; \pi\}.$$

d) Se observă că domeniul de valori al funcției f ce reprezintă membrul din stânga al ecuației este $E(f) = [-2; 2]$, iar domeniul de valori al funcției g ce reprezintă membrul din dreapta ecuației este $E(g) = 2; +\infty)$ (amintim inegalitatea $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$ și $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$). Astfel se obține sistemul

$$\begin{cases} 2\,cos\left(\frac{x}{3}\right) = 2 \\ 2^x + 2^{-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos\left(\frac{x}{3}\right) = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$S = \{0\}.$$

e) Avem $arccos(2\,log_3(tg\,x)) = 0 \Leftrightarrow 2\,log_3(tg\,x) = 1 \Leftrightarrow log_3(tg\,x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $tg\,x = \sqrt{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + \pi n | n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

f) *DVA* al ecuației reprezintă

$$\begin{cases} sin\,x > 0 \\ \sqrt{2}\,sin\,x \neq 1 \\ 1 + cos\,x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ sin\,x \neq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ cos\,x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ sin\,x \neq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ cos\,x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

În *DVA* ecuația dată este echivalentă cu

$$1 + cos\,x = \left(\sqrt{2}\,sin\,x\right)^2 \Leftrightarrow 1 + cos\,x = 2\,sin^2 x \Leftrightarrow 1 + cos\,x = 2(1 - cos^2 x) \Leftrightarrow$$
$$(1 + cos\,x) - 2(1 - cos\,x)(1 + cos\,x) = 0 \Leftrightarrow (1 + cos\,x)\big(1 - 2(1 - cos\,x)\big) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(1 + cos\,x)(2\,cos\,x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cos\,x = -1 \\ cos\,x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin \emptyset (\hat{\imath}nDVA) \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} +$$
$2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ (mulțimea soluțiilor $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ nu verifică *DVA*).

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi n | n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Deseori metoda substituției reprezintă o metodă efectivă de rezolvare a ecuațiilor transcendente.

Exemplul 2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $arcsin(2^{x+1}) + arcsin\left(2\sqrt{3} \cdot 2^x\right) = \frac{\pi}{2}$;

b) $2\,sin^2(2\pi \cdot 2^x) - 4\,sin(2\pi \cdot 2^x) + sin(4\pi \cdot 2^x) + 4\,sin^2(\pi \cdot 2^x) = 0$;

c) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{sin\,x} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{sin\,x} = 3\frac{1}{3}$.

Soluții.

a) Fie $2^{x+1} = u, 2\sqrt{3} \cdot 2^x = v$. Atunci ecuația devine

$$arcsin\,u + arcsin\,v = \frac{\pi}{2}.$$

Deoarece $arcsin\,v + arccos\,v = \frac{\pi}{2}$, se obține

$$arcsin\,u + \frac{\pi}{2} - arccos\,v = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow arcsin\,u = arccos\,v.$$

Deci $sin(arcsin\,u) = sin(arccos\,v)$ și, deoarece $sin(arccos\,\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$, avem $u = \sqrt{1-v^2}$, de unde $1 - v^2 = u^2$.

Revenind la necunoscuta inițială, se obține

$$1 - 12 \cdot 2^{2x} = 4 \cdot 2^{2x} \Leftrightarrow 16 \cdot 2^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2^{2x+4} = 2^0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

$$S = \{-2\}.$$

b) Notăm $y = \pi \cdot 2^x, y > 0$. Atunci ecuația dată devine

$$2\,sin^2\,2\,y - 4\,sin\,2\,y + sin\,4\,y + 4\,sin^2\,y = 0.$$

Grupând convenabil, se obține

$$2\,sin^2\,2\,y - 2\,sin\,2\,y - 2\,sin\,2\,y + 2\,sin\,2\,y\,cos\,2\,y + 2 - 2\,cos\,2\,y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,sin\,2\,y(sin\,2\,y - 1 + cos\,2\,y) - 2(sin\,2\,y - 1 + cos\,2\,y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(sin\,2\,y - 1 + cos\,2\,y)(sin\,2\,y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} sin\,2\,y - 1 + cos\,2\,y = 0 \\ sin\,2\,y - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}}sin\,2\,y + \frac{1}{\sqrt{2}}cos\,2\,y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ sin\,2\,y = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} cos\,2\,y \cdot cos\frac{\pi}{4} + sin\,2\,y \cdot sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cos\left(2y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 2y - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 2y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} y = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} y = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Deoarece $y > 0$, avem

$$\left[\begin{array}{c} y = \pi k, k \in \mathbb{N}^* \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{N} \end{array}\right..$$

Prin urmare,

$$\left[\begin{array}{l}\pi \cdot 2^x = \pi k, k \in \mathbb{N}^* \\ \pi \cdot 2^x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{N}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x = k, k \in \mathbb{N}^* \\ 2^x = \frac{1}{4} + n, n \in \mathbb{N}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = log_2 k, k \in \mathbb{N}^* \\ x = log_2\left(\frac{1}{4} + n\right), n \in \mathbb{N}\end{array}\right..$$

$$S = \left\{log_2 k ; log_2\left(\frac{1}{4} + n\right) | k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

c) Se observă că avem $(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 25 - 24 = 1$, de unde rezultă că $5 - 2\sqrt{6} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = (5 + 2\sqrt{6})^{-1}$ și, prin urmare ecuația dată devine $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^{sin\, x} + \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^{-sin\, x} = \frac{10}{3}$.

Notăm $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^{sin\, x} = t, t > 0$ și obținem ecuația $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$ sau $3t^2 - 10t + 3 = 0$. De unde $t = 3$ sau $t = \frac{1}{3}$.

Se observă că $5 + 2\sqrt{6} = 3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$, de unde urmează $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = |\sqrt{3} + \sqrt{2}| = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ și, prin urmare avem

$$\left[\begin{array}{l}(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{sin\, x} = 3 \\ (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{sin\, x} = \frac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}sin\, x = log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3 \\ sin\, x = log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \frac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}sin\, x = log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3 \\ sin\, x = -log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3\end{array}\right..$$

Deoarece $\sqrt{3} + \sqrt{2} > 3$, rezultă că $log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3 \in (0; 1)$ și, prin urmare obținem

$$\left[\begin{array}{l}x = arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pi n \pm arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3\right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$S = \left\{\pi n \pm arcsin\left(log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3\right) | n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Bibliografie

1. COHAL, T.; IUREC, Gh.; POPA, G. *Probleme de matematică pentru elevii clasa X-a*. Ed. a 3-a. Pitești, 2010.
2. ТКАЧУК, В. В. *Математика абитуриента*. Москва: МЦНМО, 2008.
3. www.math.md/school.