

METODĂ DE CALCUL A ELEMENTELOR ELASTICE ALE MAȘINILOR

METHOD OF CALCULATING THE ELASTIC ELEMENTS OF THE MACHINES

Alexei BOTEZ

Universitatea Tehnică a Moldovei

E-mail: alexei.botez@gmail.com

ORCID ID: 0000-0001-8357-076X

Rezumat: Elementele elastice joacă un rol important în construcțiile mașinilor. Asestea sunt bunăoară arcele de diferite tipuri, resorturile, inelele de reazem, torsioanele și chiar unele batiuri. În procesul proiectării mașinilor apare necesitatea calculării forțelor apărute în rezultatul deformării elementelor elastice atât la funcționarea mașinii cât și la deformare în timpul asamblării. Cunoașterea parametrilor elementelor elastice este la proiectarea dispozitivelor de asamblare. Una din metodele posibile de calcul ar fi integralul lui Mohr, elemntele calculate fiind formalizate printr-o bară cu un capăt fix. Ca rezultat pe lângă caulculul parametrilor necesari uneori apare posibilitatea optimizării formei constructive a pieselor proiectate pentru o asamblare și o mentenanță mai ușoară.

Cuvinte cheie: element elastic, deformare, optimizare

Abstract: Elastic elements have an important role in machine construction. These includes various types of bows, springs, bearing rings, torsions and even some frames.

In the process of machines designing it is need to calculate the forces, which can appeared, as a result of elastic elements deformation during of machine operation or it assembly.

It is necessary to know the parameters of the elastic elements when designing the assembly devices.

The Mohr's integral can be used as possible calculation method, the calculated elements being formalized by a bar with a fixed end.

In addition as a result, to calculating the necessary parameters, sometimes appears the possibility of optimizing the constructive shape of the parts designed for easier assembly and maintenance.

Keywords: elastic element, deformation, optimization

Introducere

Elementele elastice prezintă o parte importantă ale mașinilor.

În procesul proiectării, dar și a pregătirii producerii apare necesitatea calculării parametrilor acestora: ale forțelor de deformare, dimensiunilor și formelor optime [1]. Pentru atingerea acestor obiective deseori sunt utilizate diferite metode de formalizare.

În calitate de exemplu pot fi luate inelele de reazem. Acestea sunt folosite pe larg pentru fixarea pieselor asamblate. Există o serie de inele (cu profil rotund, dreptunghiular, excentrice, concentrice) având construcții diferite, utilizate în mai multe domenii concrete. Dimensiunile și construcțiile inelelor sunt stipulate în standarde [2]. însă forțele necesare deformării lor și gradul maxim de deformare la instalare nu sunt indicate. Obiectivul cercetării este de a deduce relațiile necesare calculului parametrilor indicați.

Metodologia cercetării

Să precăutăm ca exenplu un inel de reazem excentric cu profil transversal dreptunghiular (fig.1).

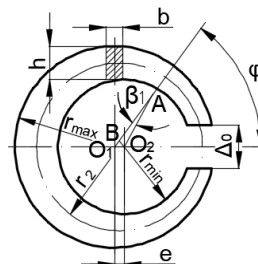


Figura 1. Inel de reazem excentric cu dimensiuni

Teoretic inelele excentrice din punct de vedere al deformării au mai multe avantaje față de cele concentrice. Datorită formei lor deformațiile în aceste inele se distribuie mai uniform, și, cum va fi arătat mai jos, astfel de inele devin mai trainice, mai ales la anumite dimensiuni.

La montare inelele sunt deformat de forța distribuită q sau de două forțe concentrate F , depuse tangențial.

La instalarea în gaură inelele sînt strînse, iar pe arbore-desfăcute. În dependență de aceasta forțele de deformare sînt depuse într-o direcție sau alta, deaceea formulele, ce se aportă inelelor instalate pe arbore sînt echivalente celor ce se aportă inelelor instalate în gaură, diferită fiind doar direcția forțelor și deformațiilor.

Jocul Δ_j poate fi stabilit ca diferența lungimilor circumferinței mijlocii pînă și după deformarea inelului:

$$\Delta_j = 2 \cdot \pi \cdot r_2 - 2 \cdot \pi \cdot r'_2 \quad (1)$$

În limita deformațiilor elastice valoarea Δ_j este direct proporțională intensității forței distribuite q sau concentrate F . În ambele cazuri coeficientul de proporționalitate dintre valorile date poate fi aflat prin integralul lui Mohr [3].

Pentru aceasta să precăutăm jumătate de inel (Fig.2), considerînd un capăt al lui fixat, iar altul liber.

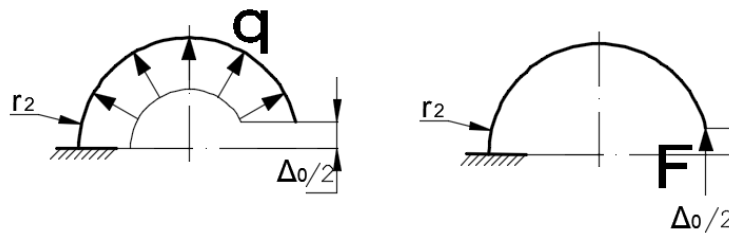


Figura 2. Formalizarea deformării inelului de reazem

Deformațiile jumătății a doua a inelului vor fi simetrice deformațiilor jumătății precăutate.

Atunci în conformitate cu integralul lui Mohr deplasarea capătului liber, de la forța depusă tangențial circumferinței de mijloc a inelului va fi:

$$\frac{\Delta_j}{2} = \int_0^{\pi} \frac{M \cdot M_1}{E \cdot I} \cdot r_2 d\varphi + \int_0^{\pi} \frac{k_{tr} \cdot Q \cdot Q_1}{G \cdot F_{tr}} \cdot r_2 d\varphi + \int_0^{\pi} \frac{N \cdot N_1}{E \cdot F_{tr}} \cdot r_2 d\varphi \quad ; \quad (2)$$

unde r_2 este raza circumferinței de mijloc a inelului;

M, Q, N - funcțiile momentului de încovoiere, forțelor transversale și normale, apărute, apărute în secțiunea transversală a inelului de la forța dată;

M_1, Q_1, N_1 - aceleași funcții de la forța unitară depusă în locul tăieturii, tangențial circumferinței de mijloc;

E, G - modulul de elasticitate de gradul I și II al materialului inelului de reazem;

$F_{tr} = b \cdot h$ - aria secțiunii transversale a inelului;

$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$ - momentul de inerție al inelului la deformarea lui în planul de curbură;

$k_{tr}=1.2$ - coeficientul, ce depinde de forma transversală a inelului cu profil dreptunghiular;

$\Delta_j = \Delta - \Delta_0$ - schimbarea jocului în tăietura inelului de reazem, ca rezultat al acționării forței de deformare.

Funcțiile factorilor interni sînt aflați folosind metoda secțiunilor. Din echilibrul sectorului evidențiat al inelului aflăm:

- la deformarea inelului cu forță distribuită q :

$$M = -2 \cdot q \cdot r_2^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} ;$$

$$Q = -q \cdot r_2 \cdot \sin \varphi ; \quad (3)$$

$$N = 2 \cdot q \cdot r_2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} .$$

- la deformarea inelului cu forțe concentrate F:

$$\begin{aligned} M &= -F \cdot r_2 \cdot (1 - \cos \varphi) ; \\ Q &= -F \cdot \sin \varphi ; \\ N &= -F \cdot \cos \varphi . \end{aligned} \quad (4)$$

La deformarea barei cu forță unitară figura 5 în direcția dată, din condiția de echilibru avem:

$$\begin{aligned} M_1 &= -r \cdot (1 - \cos \varphi) ; \\ Q_1 &= -\sin \varphi ; \\ N_1 &= -\cos \varphi . \end{aligned} \quad (5)$$

Substituind variabilele din relația (2) primim:

a) la acțiunea forței distribuite q:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_j}{2} &= \frac{24 \cdot q \cdot r_2^4}{E \cdot b \cdot \delta^3} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot (1 - \cos \varphi) d\varphi}{(1 - \chi \cos \varphi)^3} + \frac{1.2 \cdot q \cdot r_2^2}{G \cdot b \cdot \delta} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{1 - \chi \cdot \cos \varphi} - \\ &\quad - \frac{2 \cdot q \cdot r_2^2}{e \cdot b \cdot \delta} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \varphi d\varphi}{1 - \chi \cdot \cos \varphi} . \end{aligned} \quad (6)$$

b) la acțiunea forței concentrate F:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_j}{2} &= \frac{12 \cdot F \cdot r_2^3}{E \cdot b \cdot \delta^3} \cdot \int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos \varphi)^2}{(1 - \chi \cdot \cos \varphi)^3} d\varphi + \frac{1.2 \cdot F \cdot r_2}{G \cdot b \cdot \delta} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \chi \cdot \cos \varphi} d\varphi + \\ &\quad + \frac{F \cdot r_2}{E \cdot b \cdot \delta} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{1 - \chi \cdot \cos \varphi} . \end{aligned} \quad (7)$$

După integrare schimbarea jocului Δ se stabilește corespunzător:

a)

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \frac{36 \cdot \pi \cdot r_2^4 \cdot q}{E \cdot b \cdot \delta^3 \cdot (1 + \chi^2) \cdot \sqrt{1 - \chi^2}} + \frac{2.4 \cdot \pi \cdot q \cdot r_2^2}{G \cdot b \cdot \delta \cdot \chi^2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \chi^2} \right) + \\ &\quad + \frac{2 \cdot \pi \cdot q \cdot r_2^2}{E \cdot b \cdot \delta \cdot \chi^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1 - \chi}{1 + \chi}} + (\chi - 1) \right) . \end{aligned} \quad (8)$$

b)

$$\Delta_j = \frac{18 \cdot \pi \cdot F \cdot r_2^3}{E \cdot b \cdot \delta^3 \cdot (1 + \chi^2) \cdot \sqrt{1 - \chi^2}} + \frac{1.2 \cdot \pi \cdot F \cdot r_2}{G \cdot \delta \cdot b} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \chi^2}}{\chi} +$$

$$+ \frac{\pi \cdot F \cdot r_2}{E \cdot b \cdot \delta \cdot \chi^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \chi^2}} - 1 \right) \quad (9)$$

La inelele utilizate înălțimea secțiunii transversale h e mult mai mică ca raza circumferinței mijlocii r_2 . În acest caz ultimii doi factori pot fi ignorați fără vre-o eroare mare pentru precizia calculului (eroarea nu depășește 0.3%).

Atunci:

$$q = \frac{E \cdot b \cdot \delta^3 \cdot (1 + \chi^2) \cdot \sqrt{1 - \chi^2}}{36 \cdot \pi \cdot r_2^4} \cdot \Delta_j \quad ; \quad (10)$$

$$F = \frac{E \cdot b \cdot \delta^3 \cdot (1 + \chi^2) \cdot \sqrt{1 - \chi^2}}{18 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \Delta_j \quad (11)$$

Astfel știind schimbarea jocului Δ , din expresiile (10) și (11) putem calcula forțele q și F , ce nu le vor depăși pe cele admisibile, care la rândul său depind de durabilitatea inelului:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{6 \cdot q \cdot r_2^2 \cdot (1 - \cos \varphi)}{b \cdot \delta^2 \cdot (1 - \chi \cdot \cos \varphi)^2} \leq [\sigma] \quad ; \quad (12)$$

sau

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{6 \cdot F \cdot r_2 \cdot (1 - \cos \varphi)}{b \cdot \delta^2 \cdot (1 - \chi \cdot \cos \varphi)^2} \leq [\sigma] \quad (13)$$

unde M_{\max} este momentul de încovoiere în secțiunea periculoasă a inelului;
W-momentul de opunere încovoierii în această secțiune;

$[\sigma]$ - tensiunile admisibile ale materialului inelului.

Optimizarea dimensiunilor inelelor de reazem constă în determinarea excentricității χ la care schimbarea valorii Δ ar fi maximală. Totodată schimbarea valorii lui χ schimbă locul secțiunii periculoase în inel. La valori mici ale lui χ ea se află vizavi de tăietură. Cu creșterea χ locul secțiunii periculoase se apropie de tăietură.

Din această cauză la optimizarea dimensiunilor inelelor de reazem în primul rând trebuie determinat unghiul φ la care e situată secțiunea periculoasă în inel și doar apoi dependența acestui unghi de excentricitatea χ .

În secțiunea periculoasă tensiunile sînt maxime, deaceia pentru a găsi locul acestei secțiuni e necesară studierea extremelor funcției σ_{\max} :

$$\frac{d \sigma_{\max}}{d \varphi} = \frac{6 \cdot q \cdot r_2^2}{b \cdot \delta^2} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{(1 - \chi \cdot \cos \varphi) - 2 \cdot \chi \cdot (1 - \cos \varphi)}{(1 - \chi \cdot \cos \varphi)^3} = 0 \quad ; \quad (14)$$

sau

$$\frac{d \sigma_{\max}}{d \varphi} = \frac{6 \cdot F \cdot r_2}{b \cdot \delta^2} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{(1 - \chi \cdot \cos \varphi) - 2 \cdot \chi \cdot (1 - \cos \varphi)}{(1 - \chi \cdot \cos \varphi)^3} = 0 \quad (15)$$

Egalitatea cu zero a derivatei funcției σ_{\max} e posibilă dacă $\sin \varphi = 0$ sau:

$$\frac{(1 - \chi \cdot \cos \varphi) - 2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos \varphi)}{(1 - \chi \cdot \cos \varphi)^3} = 0 \quad (16)$$

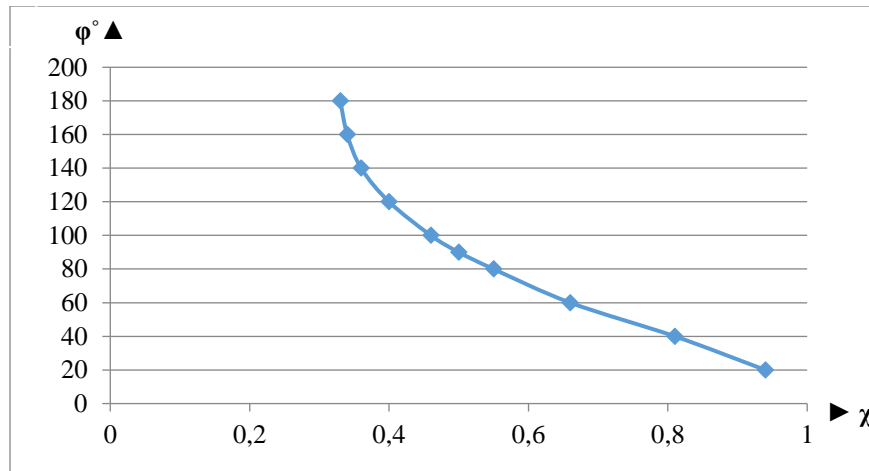


Figura 3. Unghiul de amplasare a secțiunii periculoase φ funcție de excentricitatea χ .

În primul caz secțiunea periculoasă e situată vizavi de tăietură și nu depinde de excentricitatea χ , caz ce corespunde inelelor cu profil constant ($\chi=0$).

Pentru inele cu profil variabil intră în vigoare formula (16) ce reprezintă o ecuație transcendentă față de variabila φ . Rezolvarea acestei ecuații în diapazonul $\chi=0...1$ cu pasul 0.01 e prezentată în fig. 3, de unde reiese, că secțiunea periculoasă e situată în planul de simetrie a inelului ($\varphi=180^\circ$) la $\chi=0...0.33$.

Sporirea excentricității deplasează secțiunea periculoasă spre tăietura inelului. La $\chi=1$ φ tinde spre zero.

Schimbarea excentricității mai aduce la schimbarea valorilor forțelor necesare deformării și valorii maxime a jocului Δ_j , respectînd condiția de evitare a deformărilor plastice a inelului deformat. Aceste schimbări pot fi calculate prin formulele (10, 11, 12, 13).

În fig. 4, 5 sunt reprezentate graficele obținute ca rezultat al calculului schimbării F și Δ_j în dependență de schimbarea excentricității χ pentru inele cu dimensiunile: $r_2=24.3$; $b=1.5$; $\delta=4.1$; $[\sigma]=240\text{Mpa}$; și pasul $\chi=0.01$ în diapazonul de la 0 la 1.

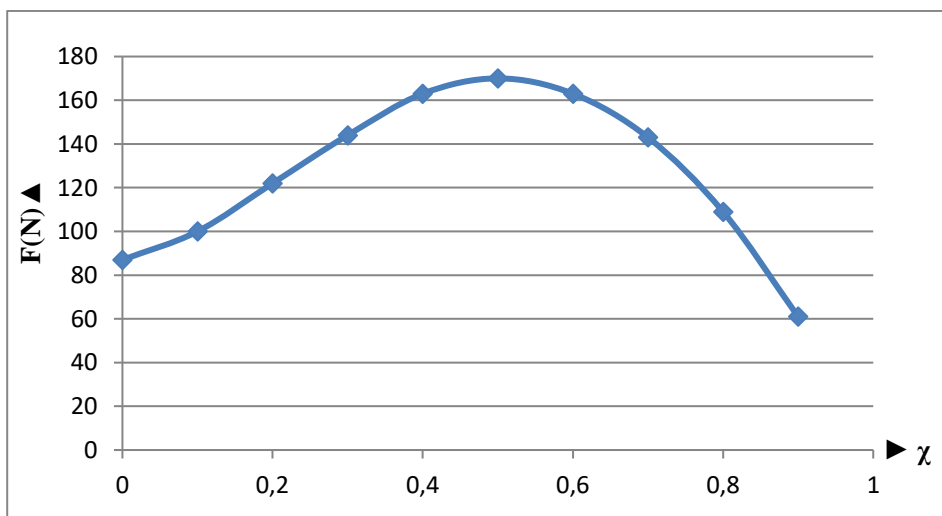


Figura 4. Dependența forței admisibile aplicate inelului de reazem $F(N)$ funcție de excentricitatea χ .

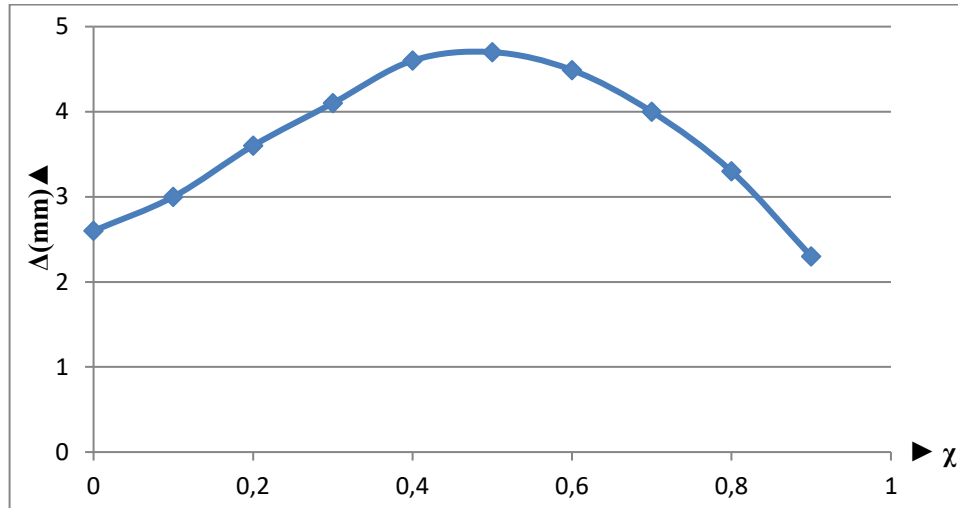


Figura 5. Dependența deformării admisibile a inelului de reazem Δ (mm) funcție de excentricitatea χ .

În scopul automatizării procesului de optimizare a dimensiunilor inelelor și determinării unghiului optimal α de acționare a forțelor de deformare formulele (12, 13, 14, 15) au fost algoritmizate, formula (15) fiind calculată prin metoda de iterație a lui Rîbacov [4], deoarece este irezolvabilă din punct de vedere matematic. Rezultatele calculului pentru inelele de reazem cu parametrii: $r_2=24.3$; $b=1.5$; $\delta=4.1$; $[\sigma]=240\text{Mpa}$ sunt prezentate în fig. 6 și 7.

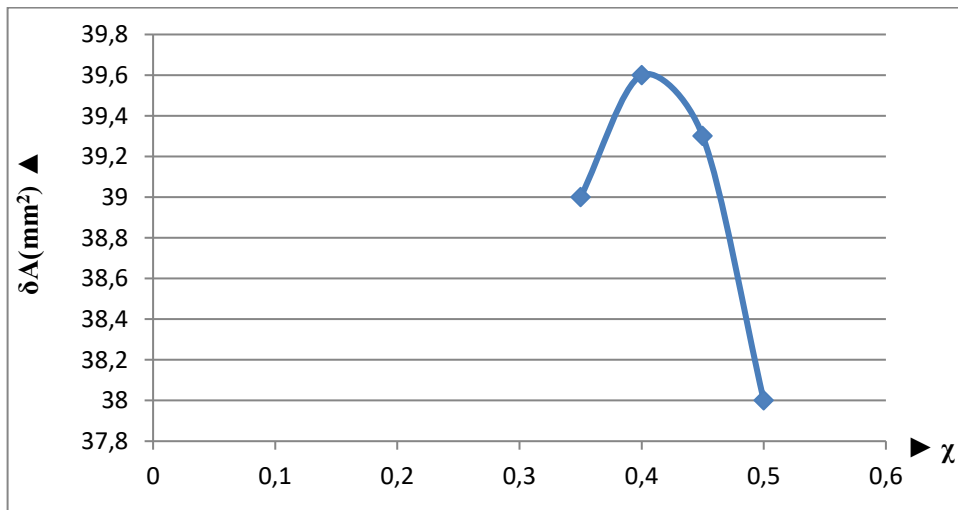


Figura 6. Dependența deformării admisibile a inelului de reazem δA (mm²) funcție de excentricitatea χ cu forțe aplicate sub unghi $\alpha=0^\circ$.

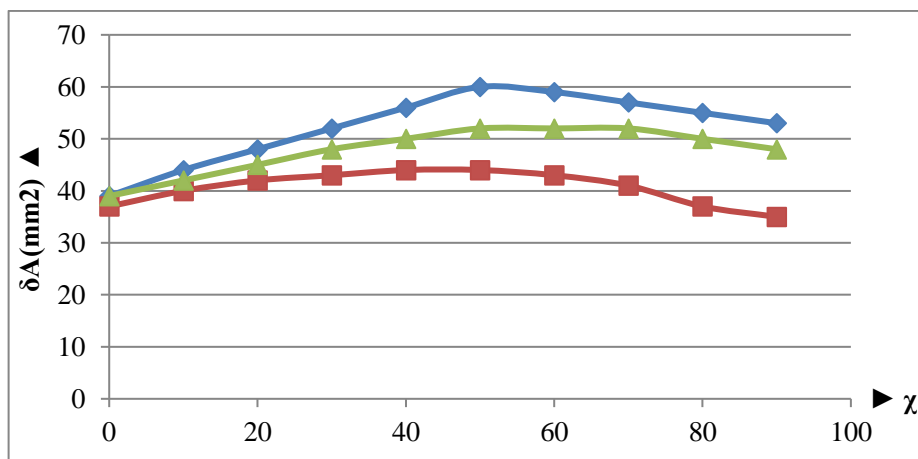


Figura 7. Dependența deformării admisibile a inelului de reazem $\delta A(\text{mm}^2)$ funcție de unghiul de aplicare α a forțelor de deformare. Pentru excentricitatea $\chi=0$ (grafic cu simbol \square), $\chi=0,33$ (grafic cu simbol Δ) și $\chi=0,4$ (grafic cu simbol \diamond). Pentru excentricitatea $\chi=0$ (grafic cu simbol \square), $\chi=0,33$ (grafic cu simbol Δ) și $\chi=0,4$ (grafic cu simbol \diamond).

Rezultate

În rezultatul studiului s-a ajuns la relațiile ce permit determinarea forței de deformare necesare la instalarea inelelor de reazem, a deformării maxim admisibile ale acestora și a unghiului optim de aplicare a forțelor de deformare.

Inelele cu excentricitatea relativă 0.5, ce a fost determinată ca optimă, posedă o deformabilitate sporită cu 20...25% față de cele stipulate în standardele GOST 13942-83 și GOST 13943-86, ce sunt executate cu excentricitatea relativă 0.2...0.3. La aplicarea forțelor de deformare sub un unghi de 50° , determinat ca optim, deformabilitatea inelelor excentrice crește cu 25...30% iar ale celor concentrice cu circa 20% [5].

Discuții

Relațiile obținute au fost verificate printr-un studiu experimental. Inelele de reazem au fost deformate pe un dispozitiv cu măsurarea forțelor de deformare cu un dinamometru și prin propulsarea pe suprafață conică cu măsurarea forțelor de propulsare cu senzori tensometrici conectați prin amplificator la un registrator. Ca rezultat la deformarea unui inel excentric cu dimensiunile: $r_2=24.3$; $b=1.5$; $\delta=4.1$; $[\sigma]=240\text{Mpa}$ au fost obținute rezultate ce nu depășesc o eroare de 5% față de cele calculate.

Concluzii

Relațiile propuse pot fi utilizate pentru calculul parametrilor inelelor de reazem ce lipsesc în tabelele din standarde, iar metoda vizată de formalizare poate fi utilizată și la calcularea altor elemente elastice ale mașinilor.

Bibliografie:

1. Семенов А. Н. Технологичность конструкции изделия машиностроения. Рыбинск, РГТАУ, 2016, 217р.
2. GOST 27017-86 (ISO 1891-79) Изделия крепежные. Термины и определения. Amazon.com Services LLC, 2020, 409р.
3. Феодосьев В. И. Сопrotивление материалов. Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018, 544р.
4. Zhavoronkov L. Numerical Analysis in Pascal ABC: Studies in Applied Mathematics. Amazon.com Services LLC, 2020, 409р.,
5. Botez A. Rusu E. Design aspects of installation devices of the support rings. Journal of Engineering Science Vol. XXVIII, no. 3 (2021), pp. 51 – 63.